Sobre la inversa de grupo de grafos distancia regulares[S]

Á. Carmona

Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya.
`E-mail: angeles.carmona@upc.edu`

Resumen. En este trabajo estudiamos cuando la inversa de grupo del Laplaciano combinatorio de un grafo distancia–regular es una M–matriz. Cuando esto ocurre decimos que el grafo tiene la M–propiedad. Aquí probamos que sólo grafos distancia regulares con diámetro menor que cuatro pueden tener la M–propiedad y damos una caracterización en términos del vector de intersección.

Palabras clave. *M–matriz, inversa de grupo, grafos distancia regulares*

1 Introducción

Las M–matrices aparecen de forma natural en discretizaciones de operadores diferenciales, particularmente aquellos que verifican un principio del mínimo, tales como el Laplaciano. De hecho las M–matrices verifican propiedades de monotonía que son la contrapartida discreta del principio del mínimo, y las hacen adecuadas para la resolución de sistemas grandes y vacíos de ecuaciones lineales mediante métodos iterativos.

Una propiedad bien conocida sobre M–matrices irreducible y no singulares es que su inversa es no negativa, [4]. Sin embargo, este escenario cambia drásticamente cuando la matriz es una M–matriz irreducible y singular. En este caso, se conoce que la matriz tiene una inversa generalizada que es no negativa, pero esto no es cierto para cualquier inversa generalizada. En este trabajo nos centramos en estudiar cuando la inversa de grupo del Laplaciano combinatorio de un grafo distancia regular en una M–matriz, ver [3] para las demostraciones de los resultados y una ampliación de los mismos.

La terna $\Gamma = (V, E, c)$ denota una red finita; es decir, un grafo finito y conexo sin lazos ni ramas múltiples, con conjunto de vértices V cuyo cardinal es n, y conjunto de ramas E, de forma que en cada rama $\{x, y\}$ asignamos una *conductancia* $c(x, y) > 0$. Definimos el *grado* de un vértice como $k(x) = \sum\limits_{y\in V} c(x, y)$,

[S] Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología, bajo el proyecto MTM2011-28800-C02-02.

para cada $x \in V$. La distancia usual desde el vértice x al vértice y se denota por $d(x,y)$ y $D = \max\{d(x,y) : x,y \in V\}$ denota el *diámetro* de Γ. Denotamos por $\Gamma_i(x)$ el conjunto de vértices a distancia i desde el vértice x, $\Gamma_i(x) = \{y : d(x,y) = i\}$, $0 \le i \le D$. El *grafo complementario* de Γ se define como el grafo $\overline{\Gamma}$ sobre el mismo conjunto de vértices de forma que dos vértices son adyacentes sii son no adyacentes en Γ; es decir $x \sim y$ en $\overline{\Gamma}$ sii $c(x,y) = 0$. Más generalmente, para cada $i = 1,\dots,D$, denotamos Γ_i el grafo cuyos vértices son los de Γ y en el cual dos vértices son adyacentes sii están a distancia i en Γ. Decimos que una red es *primitiva* si todos los grafos Γ_i son conexos, $i = 1,\dots,D$.

El conjunto de funciones reales sobre V se denota por $\mathcal{C}(V)$. El *Laplaciano combinatorio* o simplemente *Laplaciano* de la red Γ es el endomorfismo de $\mathcal{C}(V)$ que asigna a cada función $u \in \mathcal{C}(V)$ la función

$$\mathcal{L}(u)(x) = \sum_{y\in V} c(x,y)\Big(u(x) - u(y)\Big) = k(x)u(x) - \sum_{y\in V} c(x,y)\,u(y), \quad x \in V. \quad (1)$$

Es conocido que $\mathcal{L}$ es un operador autoadjunto y semidefinido positivo, y que 0 es el menor autovalor cuyas autofunciones son las constantes. Entonces, $\mathcal{L}$ puede ser interpretado como una M–matriz irreducible, simétrica, diagonalmente dominante y singular, L. Por tanto, la ecuación de Poisson $\mathcal{L}(u) = f$ en V tiene solución sii $\sum\limits_{x\in V} f(x) = 0$ y, cuando esto ocurre, existe una única solución $u \in \mathcal{C}(V)$ tal que $\sum\limits_{x\in V} u(x) = 0$, ver [1].

El *operador de Green* es el operador lineal $\mathcal{G} : \mathcal{C}(V) \longrightarrow \mathcal{C}(V)$ que asigna a cada $f \in \mathcal{C}(V)$ la única solución de la ecuación de Poisson con dato $f - \frac{1}{n}\sum\limits_{x\in V} f(x)$ tal que $\sum\limits_{x\in V} u(x) = 0$. Es fácil probar que $\mathcal{G}$ es un operador autoadjunto y semidefinido positivo y 0 es el menor autovalor cuyas autofunciones asociadas son las constantes. Además, si $\mathcal{P}$ denota la proyección sobre el subespacio de las constantes entonces,

$$\mathcal{L} \circ \mathcal{G} = \mathcal{G} \circ \mathcal{L} = \mathcal{I} - \mathcal{P}.$$

Además, definimos la *función de Green* como $G : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $G(x,y) = \mathcal{G}(\varepsilon_y)(x)$, donde ε_y denota la función de Dirac en y. Por tanto, interpretando $\mathcal{G}$, o G, como una matrix vemos que no es otra cosa más que $\mathsf{L}^{\#}$ la inversa de grupo de L, la matriz asociada con $\mathcal{L}$. Consecuentemente, $\mathsf{L}^{\#}$ es una M–matriz sii $G(x,y) \le 0$ para cada $x,y \in V$ con $x \ne y$ y entonces $\mathcal{G}$ puede ser identificado con el Laplaciano combinatorio de una nueva red con el mismo conjunto de vértices que denotamos por $\Gamma^{\#}$. Sin embargo en [3], demostramos como una consecuencia de la monotonía de $\mathcal{L}$, que es suficiente con verificar que $G(x,y) \le 0$ para cada $x \sim y \in V$. Hecho que se ratifica aquí al obtener una expresión explícita de la función de Green.

De ahora en adelante diremos que la red Γ tiene la *M–propiedad* sii $\mathsf{L}^{\#}$ es una M–matriz.

2 Grafos distancia regulares con la M–propiedad

Nuestra finalidad en esta sección es caracterizar cuando la inversa de grupo de la matriz asociada al Laplaciano combinatorio de un grafo distancia regular verifica la M–propiedad.

Un grafo conexo Γ se llama *distancia regular* si existen enteros b_i, c_i, $i = 0, \dots, D$ tales que para cualquier par de vértices $x, y \in \Gamma$ a distancia $i = d(x,y)$, hay exactamente c_i vecinos de y en $\Gamma_{i-1}(x)$ y b_i vecinos de y en $\Gamma_{i+1}(x)$. Además, $|\Gamma_i(x)|$ se denota usualmente por k_i. En particular, Γ es regular de grado $k = b_0$. La tupla

$$\iota(\Gamma) = \{b_0, b_1, \dots, b_{D-1}; c_1, \dots, c_D\},$$

se denomina *vector de intersección* de Γ. Además, $a_i = k - c_i - b_i$ es el número de vecinos de y en $\Gamma_i(x)$, para $d(x,y) = i$. Claramente, $b_D = c_0 = 0$, $c_1 = 1$ y el diámetro de Γ es D. Usualmente, los parámetros a_1 y c_2 se denotan por λ y μ, respectivamente. Para otras propiedades sobre grafos distancia regulares referimos al lector a las citas [6, 8].

If $k = 2$ entonces $b_i = 1$ lo que implica que $c_i = 1$ y $a_i = 0$, $i = 1, \dots, D-1$. Estos grafos se denominan *ciclos*. Más precisamente, si $n \geq 3$, el n–ciclo, C_n, es el grafo distancia regular con diámetro $D = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ cuyo vector de intersección es

$$\iota(C_n) = \{2, 1, \dots, 1; 1, \dots, 1, c_D\},$$

donce $c_D = 1$ cuando n es par y $c_D = 2$ cuando D es impar, ver [8].

Por otro lado, Γ es *bipartito* sii $a_i = 0$, $i = 1, \dots, D$, mientras que Γ es *antipodal* sii $b_i = c_{D-i}$, $i = 0, \dots, D$, $i \neq \left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$ y entonces $b_{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} = k_D c_{\lceil \frac{D}{2} \rceil}$. Es bien conocido que los grafos distancia regulares con grado $k \geq 3$ que no son ni bipartitos ni antipodales son primitivos, ver por ejemplo [8, Teor. 4.2.1]. Además, cualquier grafo distancia regular y primitivo, de hecho cualquier grafo distancia regular no antipodal, satisface la desigualdad $k \leq k_D(k_D - 1)$, ver [8, Teor. 5.6.1].

En la siguiente proposición obtenemos la inversa de grupo del laplaciano de un grafo distancia regular en términos del vector de intersección, ver [1, Prop. 4.2] para los detalles.

Proposición 1. *La inversa de grupo de un grafo distancia regular Γ está dada para cada $x, y \in V$ por*

$$\mathsf{L}^{\dagger}{}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{r=d(x,y)}^{D-1} \frac{1}{k_r b_r} \Big(\sum_{j=r+1}^{D} k_j \Big) - \frac{1}{n^2} \sum_{r=0}^{D-1} \frac{1}{k_r b_r} \Big(\sum_{i=0}^{r} k_i \Big) \Big(\sum_{i=r+1}^{D} k_i \Big)$$

Proposición 2. *Un grafo distancia regular* Γ *tiene la* M*–propiedad sii*

$$\sum_{j=1}^{D-1} \frac{1}{k_j b_j}\Big(\sum_{i=j+1}^{D} k_i\Big)^2 \le \frac{n-1}{k}.$$

Además, el grafo subyacente $\Gamma^\dagger$ *es* K_n *cuando la anterior desigualdad es estricta y* $\overline{\Gamma}$ *de otra forma.*

Demostración. Desde la Proposición 1, obtenemos que $\mathsf{L}^\#$ es una M–matriz sii $\mathsf{L}^\#_{xy} \le 0$ para todo par de vértices tales que $d(x,y)=1$, ya que los demás terminos de la matriz son menores que estos. El resultado se deduce de la igualdad

$$\mathsf{L}^\dagger{}_{xy} = \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{D-1} \frac{1}{k_r b_r}\Big(\sum_{j=r+1}^{D} k_j\Big)^2 - \frac{n-1}{kn^2},$$

cuando $d(x,y)=1$. Finalmente, la anterior desigualdad es un igualdad sii $\mathsf{L}^\dagger{}_{xy} = 0$ cuando $d(x,y)=1$. Por tanto, el grafo subyacente a $\Gamma^\#$ es $\overline{\Gamma}$. $\square$

Un grafo distancia regular de orden n tiene diametro $D=1$ sii es el grafo completo K_n. En este caso, la anterior desigualdad ocurre ya que el lado izquierdo es cero. Por tanto, cualquier grafo completo tiene la M–propiedad. De hecho, $\mathsf{L}^\# = \frac{1}{n^2}\mathsf{L}$, ver [2], y por tanto, $\Gamma^\#$ es también una red completa.

Corolario 1. *Si* Γ *tiene la* M*–propiedad y* $D \ge 2$*, entonces* $\lambda \le 3k - \dfrac{k^2}{n-1} - n$*, y por tanto* $n < 3k$.

La desigualdad $3k > n$ es una restricción muy fuerte para que un grafo distancia regular tenga la M–propiedad. Por ejemplo, para $n \ge 3$, si C_n tiene la M–propiedad, necesariamente $6 > n$ y esto ocurre sii o bien $D=1$; es decir $n=3$, o $D=2$; esto es $n=4,5$. Además para $n=4,5$, C_n tiene la M–propiedad ya que

$$(\mathsf{L}^\dagger)_{ij} = \frac{1}{12n}\Big(n^2 - 1 - 6|i-j|(n-|i-j|)\Big), \qquad i,j=1,\dots,n,$$

ver por ejemplo, [2].

En el siguiente resultado generalizamos la observación anterior, mostrando que sólo los grafos distancia regulares con diámetro pequeño puede satisfacer la M–propiedad.

Proposición 3. *Si* Γ *es un grafo distancia regular con la* M*–propiedad, entonces* $D \le 3$.

3 Grafos fuertemente regulares

Un grafo distancia regular con diámetro 2 se llama *fuertemente regular*, y usualmente se representa a través de cuatro parámetros (n, k, λ, μ) que sustituyen al vector de intersección, ver [8, 9]. Claramente estos parámetros no son independientes, ya que

$$(n-1-k)\mu = k(k-1-\lambda). \tag{2}$$

Por esta razón algunos autores eliminan el parámetro n en la terna anterior, ver por ejemplo [6]. Además, la igualdad (2) implica que $2k - n \leq \lambda < k - 1$, ya que $\mu \leq k$ and $D = 2$.

En el siguiente resultado, caracterizamos los grafos fuertemente regulares que tiene la M–propiedad en términos de sus parámetros.

Proposición 4. *Un grafo fuertemente regular, con parámetros* (n, k, λ, μ) *tiene la* M*–propiedad sii* $\mu \geq k - \dfrac{k^2}{n-1}$.

Kirkland et al. en [10, Theorem 2.4] dieron otra caracterizacion de los grafos fuertemente regulares que verifican la M–propiedad en términos de los autovalores del Laplaciano combinatorio.

Una comprobaciónn directa muestra que el grafo de Petersen no satisface la M–propiedad. Así, es natural preguntarse cuántos grafos fuertemente regulares satisfacen la desigualdad anterior. Para comenzar queremos recordar que si Γ es un grafo fuertemente regular con parámetros (n, k, λ, μ), entonces su grafo complementario es también fuertemente regular y los parámetros asociados son $(n, n-k-1, n-2-2k+\mu, n-2k+\lambda)$, ver por ejemplo[7], lo que en particular implica que $\mu \geq 2(k+1) - n$. Aquellos grafos fuertemente regulares para los que coinciden ambas ternas de parámetros se denominan *grafos conferencia* y entonces, sus parámetros son $(4m+1, 2m, m-1, m)$ donde $m \geq 2$. Además es conocido que tales grafos existen sii $4m+1$ es suma de dos cuadrados, ver [9].

Corolario 2. *Si* Γ *es un grafo fuertemente regular, entonces o bien* Γ *o* $\overline{\Gamma}$ *tienen la* M*–propiedad. Además, ambos tiene la* M*–propiedad sii* Γ *es un grafo conferencia.*

4 Grafos distancia regular con diámetro tres

En esta sección caracterizamos aquellos grafos distancia regulares con diámetro tres que tienen la M–propiedad. En este caso el vector de intersección es $\iota(\Gamma) = \{k, b_1, b_2; 1, c_2, c_3\}$. De nuevo los parámetros no son indepedentes, ya que como c_2 divide a kb_1, c_2c_3 divide a kb_1b_2 y además

$$(n-1-k)c_2c_3 = kb_1(b_2+c_3). \tag{3}$$

El siguiente resultado se sigue directamente de la Proposición 2.

Proposición 5. *Un grafo distancia regular con diámetro tres tiene la M–propiedad sii*
$$k^2 b_1\big(b_2c_2 + (b_2 + c_3)^2\big) \leq c_2^2 c_3^2(n-1).$$

De acuerdo con [8, Teor. 4.2.1], los grafos distancia regulares de diámetro tres se clasifican en clases, no necesariamente disjuntas, como o bien C_6, C_7, bipartito, antipodal o primitivo. Ya que ni C_6 ni C_7 satisfacen la M–propiedad estudiaremos el resto de clases, empezando por los grafos bipartitos y antipodales.

El vector de intersección de un grafo bipartito distancia regular con $D = 3$ es $\iota(\Gamma) = \{k, k-1, k-\mu; 1, \mu, k\}$, donde $1 \leq \mu \leq k-1$, μ divide a $k(k-1)$.

Proposición 6. *Un grafo bipartito distancia regular con $D = 3$ satisface la M–propiedad sii $\dfrac{4k}{5} \leq \mu \leq k-1$ y estas desigualdades implican que $k \geq 5$.*

Las desigualdades anteriores se verifican cuando $\mu = k-1$ para $k \geq 5$. Además, si $\dfrac{4k}{5} = \mu$, entonces $k = 5(4m+1)$ y $\mu = 4(4m+1)$, $m \geq 1$ y por tanto, existe una familia infinita de grafos bipartitos distancia regulares que alcanzan la cota inferior. Por otro lado, si escogemos $k = r^m$ y $\mu = (r-1)r^{m-1}$ con $m \geq 2$ y $r \geq 6$, obtenemos otra familia que satisface la condición con $\dfrac{4k}{5} < \mu < k-1$.

Si Γ es un grafo bipartito distancia regular con $D = 3$ y $\mu < k-1$, es bien conocido, ver por ejemplo [8, p.17], que Γ_3 es también un grafo bipartito distancia regular con $D = 3$ y cuyo vector de intersección es $\iota(\Gamma_3) = \{k_3, k_3 - 1, k-\mu; 1, \bar{\mu}, k_3\}$, donde $k_3 = \dfrac{(k-1)(k-\mu)}{\mu}$ y $\bar{\mu} = \dfrac{(k-\mu-1)(k-\mu)}{\mu}$. Entonces Γ_3 tiene la M–propiedad sii
$$1 \leq \mu \leq \frac{k-1}{5}.$$
Por tanto, Γ_3 tiene la M–propiedad cuando $\mu = 1$ o cuando $k = 5m+1$ y $\mu = m$, $m \geq 1$. Por otro lado, dados $m \geq 2$ y $r \geq 4$, consideramos $k = r^m$ y $\mu = (r-1)r^\ell$, $0 \leq \ell < m-1$, entonces obtenemos otra familia que verifica la condición para que Γ_3 tenga la M–propiedad con $1 < \mu < \dfrac{k-1}{5}$.

Corolario 3. *SI Γ es un grafo bipartito distancia regular con vector de intersección $\iota(\Gamma) = \{k, k-1, k-\mu; 1, \mu, k\}$, donde $1 \leq \mu < k-1$, entonces o bien Γ o Γ_3 tienen la M–propiedad, excepto cuando*
$$k - 1 < 5\mu < 4k,$$
en cuyo caso ninguno de ellos tienen la M–propiedad.

El vector de intersección de un grafo antipodal distancia regular con $D = 3$ es $\iota(\Gamma) = \{k, t\mu, 1; 1, \mu, k\}$, donde $\mu, t \geq 1$ y $t\mu < k$. Estos grafos tienen orden $n = (t+1)(k+1)$. Cuando $t = 1$, son conocidos como *grafos de Taylor*, $T(k, \mu)$.

Proposición 7. *Un grafo antipodal distancia regular con $D = 3$ tiene la M–propiedad sii es un grafo de Taylor $T(k, \mu)$ tal que $k \geq 5$ y*

$$\frac{k+3}{2} \leq \mu < k.$$

Si Γ es un grafo de Taylor con $1 \leq \mu < k - 1$, es conocido que el grafo Γ_2 es también un grafo de Taylor con vector de intersección

$$\iota(\Gamma_2) = \big\{k, k-1-\mu, 1; 1, k-1-\mu, k\big\}.$$

Entonces, Γ_2 tiene la M–propiedad sii $\mu \leq \dfrac{k-5}{2}$.

Corolario 4. *Si Γ es el grafo de Taylor $T(k, \mu)$ con $1 \leq \mu \leq k - 2$, entonces o bien Γ o Γ_2 tienen la M–propiedad, excepto cuando $\mu \in \{m-2, m-1, m, m+1\}$ para $k = 2m$ y $\mu \in \{m-1, m, m+1\}$ para $k = 2m+1$, en tal caso ninguno de ellos tiene la M–propiedad.*

Los grafos distancia regulares con $D = 3$ que son a la vez bipartitos y antipodales tienen vector de intersección $\iota(\Gamma) = \{k, k-1, 1; 1, k-1, k\}$ y se llaman *grafos k–crown.* Por tanto, son grafos de Taylor con $\mu = k - 1$ y tienen la M–propiedad sii $k \geq 5$. Consideramos para finalizar el caso primitivo.

Lema 1. *Si Γ es un grafo distancia regular con $D = 3$, entonces $k_2 = k$ sii Γ es o bien C_6, C_7 o $T(\mu, k)$.*

Proposición 8. *Si Γ es un grafo distancia regular con $D = 3$ que tiene la M–propiedad, entonces $1 < c_2 \leq b_1 < 2c_2$, $b_2 < c_3$ y $k_3 \leq k - 3$. Además, $k \geq 6$ y $c_2 < b_1$ cuando Γ no es un grafo de Taylor.*

Las desigualdades sobre los parámetros b_1, b_2, c_2 y c_3 dadas en la Proposición 8 muestran que ninguna de las familias de grafos primitivos distancia regulares con diámetro 3 listadas en [5, 8] satisfacen la M–propiedad. En [3] conjeturamos que no existen grafos primitivos distancia regulares con diámetro tres que satisfagan la M–propiedad. Más tarde Koolen y Park en [11, Teor. 1] han demostrado que esta conjetura es cierta excepto quizás para una cantidad finita de grafos distancia regulares primitivos de diámetro tres.

Referencias

[1] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M. Solving boundary value problems on networks using equilibrium measures, *J. Funct. Anal.* **171** (2000), 155–176.

[2] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M., Mitjana, M. Generalized inverses of symmetric M–matrices, *Linear Multilinear Algebra* **60** (2012), 225–240.

[3] Bendito, E., Carmona, A., Encinas, A.M., Mitjana, M. Distance–regular graphs having the M–property, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), 2438–2454.

[4] Berman, A., Plemons, R.J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences,* Classics in Applied Mathematics, vol. 9, SIAM, 1994.

[5] Biggs, N. Distancia regular graphs with diameter three, in *Algebraic and Geometric Combinatorics*, E. Mendelson (ed.), Ann. Discrete Math. 15, 1982, 69–80.

[6] Biggs, N. Algebraic Potential Theory on Graphs, *Bull. London Math. Soc.* **29** (1997), 641–682.

[7] Bondy, J.A., Murty, U.S.R. *Graph Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol 244, Springer, New York, 2008.

[8] Brouwer, A.E., Cohen, A.M., Neumaier, A.*distancia regular graphs.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 18, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] Cameron, P.J. Strongly regular graphs, in *Topics in Algebraic Graph Theory*, L.W. Beineke, R.J. Wilson (eds.), Cambridge University Press, 2004, 203–221.

[10] Kirkland, S.J., Neumann, M. Group inverses of M–matrices associated with nonnegative matrices having few eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **220** (1998), 181–213.

[11] Koolen, J.H., Park , J. A note on distance–regular graphs with a small number of vertices compared to the valency, *European J. Combin.*, **34** (2013), 935–940.